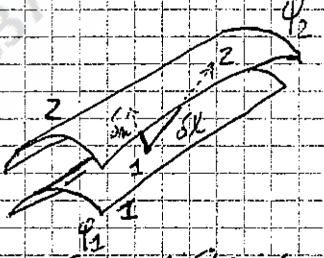
IL CAMPO

Il campo è una funzione che associa ad ogni punto dello spazio una quantità, misura di una grandezza fisica. Tale quantità può essere scalare o vettoriale e il campo ~~si dà~~ associato si dice rispettivamente scalare o vettoriale. Se lo spazio è bidimensionale, le zone in cui il campo ~~è uguale~~ assume lo stesso valore si dicono linee di livello. Se lo spazio è tridimensionale, tali zone si dicono superfici di livello.

Inoltre in un campo vettoriale, si definiscono linee di forza quelle linee tangenti punto per punto ai vettori campo.

IL GRADIENTE DI UN CAMPO

Consideriamo un campo <u>scalare</u> $\varphi(x, y, z)$ e due superfici di livello di valore φ_1 e φ_2. Qualsiasi congiungimento di ~~due~~ un qualsiasi punto 1 sulla superficie 1 e un punto 2 sulla superficie 2 due avrà associata una variazione della grandezza campo di $\partial\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, che dipende da solo dallo spostamento normale alla superficie 1. Si definisce, quindi, ~~cor~~ gradiente del campo φ il campo <u>vettoriale</u> definito da:



$$\vec{G}(\vec{r}) = \overrightarrow{Grad}(\varphi) = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\hat{n}$$

Si ricava immediatamente che:

- la derivata di φ in direzione $\vec{dl}$ coincide con la componente di $Grad(\varphi)$ lungo quella direzione;
- la derivata di φ è massima nella direzione di $Grad(\varphi)$ ed è uguale al modulo di $Grad(\varphi)$

Nei vari sistemi di riferimento abbiamo che:

- cartesiano

$$Grad(\varphi) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{z}$$

-

• polare piano

$$Grad(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\hat{\theta}$$

• polare cilindrico

$$Grad(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\hat{z}$$

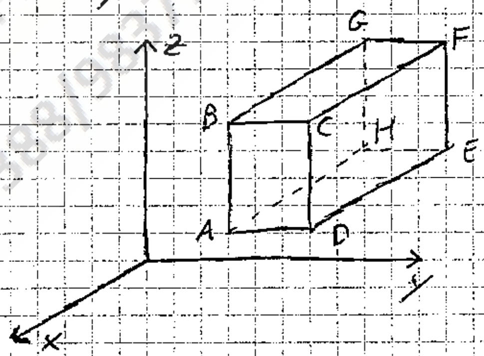
• polare sferico

$$Grad(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\hat{\theta} + \frac{1}{r\,sen\phi}\frac{\partial \varphi}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

Per indicare il gradiente di un campo, si utilizza l'operatore "nabla" $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)^*$ Quindi, avremo che $Grad(\varphi) = \vec{\nabla}(\varphi)$

LA DIVERGENZA DI UN CAMPO

Consideriamo un campo vettoriale $\vec{\varphi}(x,y,z)$ $\neq$ e calcoliamone il flusso attraverso la superficie in figura. Consideriamo solo il flusso attraverso le facce parallele al piano XZ. Avremo che



$$\Phi(\vec{\varphi}) = \int_{EFCD} \vec{\varphi}\cdot\hat{n}\, dEFCD + \int_{ABGH} \vec{\varphi}\cdot\hat{n}\, dABGH$$

Osserviamo che:

$\hat{n}_{EFCD} = \hat{y}$ $\quad$ y FISSO

$\hat{n}_{ABGH} = -\hat{y}$ $\quad$ $y + \Delta y$

Assumiamo che Δy sia "piccolo" e che $\vec{\varphi}$ sia uniforme. Allora

$$\Phi(\vec{\varphi}) = \int_{EFCD} \vec{\varphi}\cdot\hat{y}\, dEFCD + \int_{ABGH} \vec{\varphi}\cdot(-\hat{y})\, dABGH = \int_{EFCD} \varphi_y(y+\Delta y)\, dEFCD -$$

$$- \int_{ABGH} \varphi_y(y)\, dABGH = \varphi_y(y+\Delta y)\,\Delta x \Delta z - \varphi_y(y)\,\Delta x\Delta z$$

* in coordinate cartesiane

Per Taylor, sappiamo che

$$\varphi_y(y+\Delta y) \simeq \Delta y \cdot \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \varphi_y(y)$$

Quindi,

$$\Phi_S(\vec{\varphi}) \simeq \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}\Delta X \Delta Y \Delta Z + \varphi_y(y)\Delta X \Delta Z - \varphi_y(y)\Delta X \Delta Z = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}\Delta V$$

Iterando il processo su tutte le altre facce, otteniamo

$$\Phi_S(\vec{\varphi}) = \Delta X \Delta Y \Delta Z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial X} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial Y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial Z}\right)$$

Definiamo ora la divergenza di un campo come

$$div(\vec{\varphi}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Phi_S(\vec{\varphi})}{\Delta V} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial X} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial Y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial Z}$$

Questo per le coordinate cartesiane. Per le altre:

- polari piane

$$div(\vec{\varphi}) = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\varphi_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta}$$

- polari cilindriche

$$div(\vec{\varphi}) = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\varphi_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z}$$

- polari sferiche

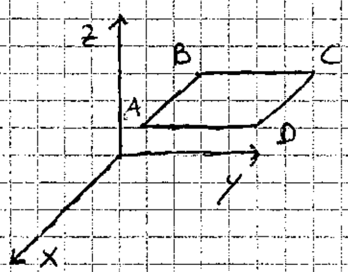
$$div(\vec{\varphi}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2\varphi_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial (sen\theta\,\varphi_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\,sen\theta}\cdot\frac{\partial \varphi_\phi}{\partial \phi} \; *$$

IL TEOREMA DI GAUSS-GREEN

Dalla dimostrazione precedente, si evince il teorema di Gauss-Green, che dice che

$$\Phi_S(\vec{A}) = \int_{S_V} \vec{A}\cdot\hat{n}\,dS_V = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV$$

IL ROTORE DI UN CAMPO



Consideriamo un campo vettoriale $\vec{A}(X,Y,Z)$ ** e calcoliamone la circuitazione attraverso la linea chiusa in figura, dove.

** con $A_Z = 0$

* con l'operatore nabla, $div(\vec{\varphi}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{\varphi}$

$\vec{dl}_{AD} = \hat{y}\,\Delta y$ $\qquad$ $\vec{dl}_{CD} = -\hat{x}\,\Delta x$

$\vec{dl}_{BC} = -\hat{y}\,\Delta y$ $\qquad$ $\vec{dl}_{AB} = \hat{x}\,\Delta x$

Considerando solo i lati paralleli al piano XZ*

$$C_\gamma(\vec{A}) = \int_{AB} \vec{A}\cdot\vec{dl}_{AB} + \int_{CD} \vec{A}\cdot\vec{dl}_{CD} = \int_{AB} \vec{A}\cdot(\hat{x})\,dl_{AB} + \int_{CD} \vec{A}\cdot(-\hat{x})\,dl_{CD} =$$

$$= \int_{AB} A_x(y)\,dl_{AB} - \int_{CD} A_x(y+\Delta y)\,dl_{CD} = A_x(y)\Delta x - A_x(y+\Delta y)\Delta x$$

Per Taylor, $A_x(y+\Delta y) \simeq \Delta y \dfrac{\partial A_x}{\partial y} + A_x(y)$. Quindi,

$$C_\gamma(\vec{A}) \simeq -\Delta y \frac{\partial A_x}{\partial y}\Delta x - A_x(y)\Delta x + A_x(y)\Delta x = -\Delta y \frac{\partial A_x}{\partial y}\Delta x$$

Estendendo il processo a tutte le dimensioni, otteniamo

$$C_\gamma(\vec{A}) = \Delta x \Delta y \left(-\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\right)$$

Definiamo ora il rotore di un campo come

$$rot(\vec{A}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_\gamma \vec{A}\cdot\vec{dl}}{\Delta S} = -\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x}$$

Vediamolo nei vari sistemi di riferimento

- cartesiano

$$rot(\vec{A}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

- polare cilindrico

$$rot(\vec{A}) = \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_r & A_\theta & A_z \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{r}$$

- polare sferico

$$rot(\vec{A}) = \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\,sen\,\theta\,\hat{\phi} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & r\,sen\,\theta\,A_\phi \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{r^2\,sen\,\theta}$$

*Supponendo che Δx, Δy siano piccoli e $\vec{A}$ uniforme